

Eigenschaften des bestimmten Integrals

1. Linearität: $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $(\forall) \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$$

2. Additivität: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktion und $(\forall) c \in [a, b]$ gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

3. Mittelwertsatz: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktion gilt:

$$(\exists) c \in (a, b) \text{ so dass } \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

4. Folgesätze: a) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f(x) \geq 0$ auf $[a, b]$ so gilt: $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

b) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f(x) > 0$ auf $[a, b]$ so gilt: $\int_a^b f(x) dx > 0$

c) Monotonie des Integrals

$$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig und } f \leq g \text{ auf } [a, b] \text{ so gilt: } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

d) $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f < g$ so gilt: $\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$

e) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $m \leq f(x) \leq M$ auf $[a, b]$ so gilt:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

f) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt: $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

5. Wenn $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und ungerade ist, so gilt: $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

6. Wenn $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und gerade ist, so gilt: $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

7. Wenn $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, so gilt: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$

8. Wenn

$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, so gilt:

$$\text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$$

$$\text{b) } \int_0^{\pi} x \cdot f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$$

9. Wenn $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ bijektiv und streng wachsend ist, dann gilt:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_c^d f^{-1}(y) dy = bd - ac \quad (\text{Gleichheit von Young}).$$

10. Wenn die Funktion f periodisch ist und die Hauptperiode T hat, dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(nx) dx = \frac{b-a}{T} \int_0^T f(x) dx$$

11. Wenn $G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ und F eine Stammfunktion von f ist, dann gilt:

$$G'(x) = [F(v(x)) - F(u(x))] = F'(v(x)) \cdot v'(x) - F'(u(x)) \cdot u'(x) = f(v(x)) \cdot v'(x) - f(u(x)) \cdot u'(x)$$