

Die Inverse einer Matrix

(Arbeitsblatt)

1) Zeige, dass jede der folgenden Matrizen umkehrbar ist und berechne jeweils ihre Inverse:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; \text{ b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}; \text{ c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \text{ d) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2) Bestimme den reellen Parameter m so, dass die Matrix A umkehrbar ist:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & m & 3 \\ -2 & -4 & -3 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}; \text{ b) } A = \begin{pmatrix} 0 & m & 1 \\ m & -2 & 0 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix}.$$

3) Bestimme den reellen Parameter m so, dass die Matrix A für $\forall x \in \mathbb{R}$ umkehrbar ist:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}; \text{ b) } A = \begin{pmatrix} 3 & x & -1 \\ m & 1 & x \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4) Löse die Matrixgleichungen:

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; & \text{ b) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}; & \text{ c) } \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \\ \text{d) } X \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 10 & 3 & 3 \end{pmatrix}; & \text{ e) } X \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}; & \text{ f) } \begin{pmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5) Es sei $A \in M_3(\mathbb{Z})$, $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix}$. Bestimme $a, b \in \mathbb{Z}$ so, dass $A^{-1} = A^*$ gilt.

6) Es sei die Matrix $A = A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 \\ a+1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

a) Bestimme $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Matrix A umkehrbar ist.

b) Berechne die Matrix A^{-1} , für $a = 1$.

c) Löse die Matrixgleichung: $X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.